



# *Hesaplamanın Termodinamiği*

*Dr. Ahmet KOLTUKSUZ*



# Gündem

- *Temel Sabitler, Eşitlikler*
- *Termodinamik İlkeler*
- *Hesaplamanın Termodinamiği*
- *Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı*
- *Hesaplamanın Termodinamiği ve Bilgi Kuramı*



## *Temel Sabitler, eşitlikler*

- Gazların ideal kanunu  
makroskopik ortam, metrik ölçekte

$$PV = nRT,$$

P basınç, V hacim, n mol cinsinden malzeme miktarı

R gaz sabiti ve T Kelvin cinsinden sıcaklıktır.

$R=8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$  değerindedir.



## *Temel Sabitler, eşitlikler*

- Gazların ideal kanunu  
mikroskopik ortam, kuantum-nano ölçekte

$$PV = Nk_B T,$$

P basınç, V hacim, N gazdaki molekül sayısıdır.

N;1 mol malzeme için Avogadro sabitidir.

k, Boltzmann sabiti ve T Kelvin cinsinden sıcaklıktır.

# Temel Sabitler, eşitlikler

- Gazların ideal kanunu  
mikroskopik ortam, kuantum-nano ölçekte

$$\text{Avogadro sabiti: } N_A = \frac{N}{n};$$

N malzemedeki atom, molekül sayısı. n; 1 mol değerindeki malzeme miktarı  
(örneğin: 1 mol hidrojen 2 gramdır.)

$$N_A = \frac{N}{n} = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

*Boltzmann sabiti*  $k_B$ :

$$k_B = \frac{R}{N_A}; \text{ R gaz sabiti ve } N_A \text{ Avogadro sabiti}$$

$$k_B = 1.380 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}; (\text{K} = \text{ }^\circ\text{C} + 273.15)$$

# Termodinamik İlkeler

- Termodinamik: Basınç, sıcaklık ve hacim ilişkileri altında gazların kinetiği.
- 1. Kanun: İzole (kapalı) bir sistemdeki toplam enerji zamana göre değişmez (enerjinin korunumu yasası).

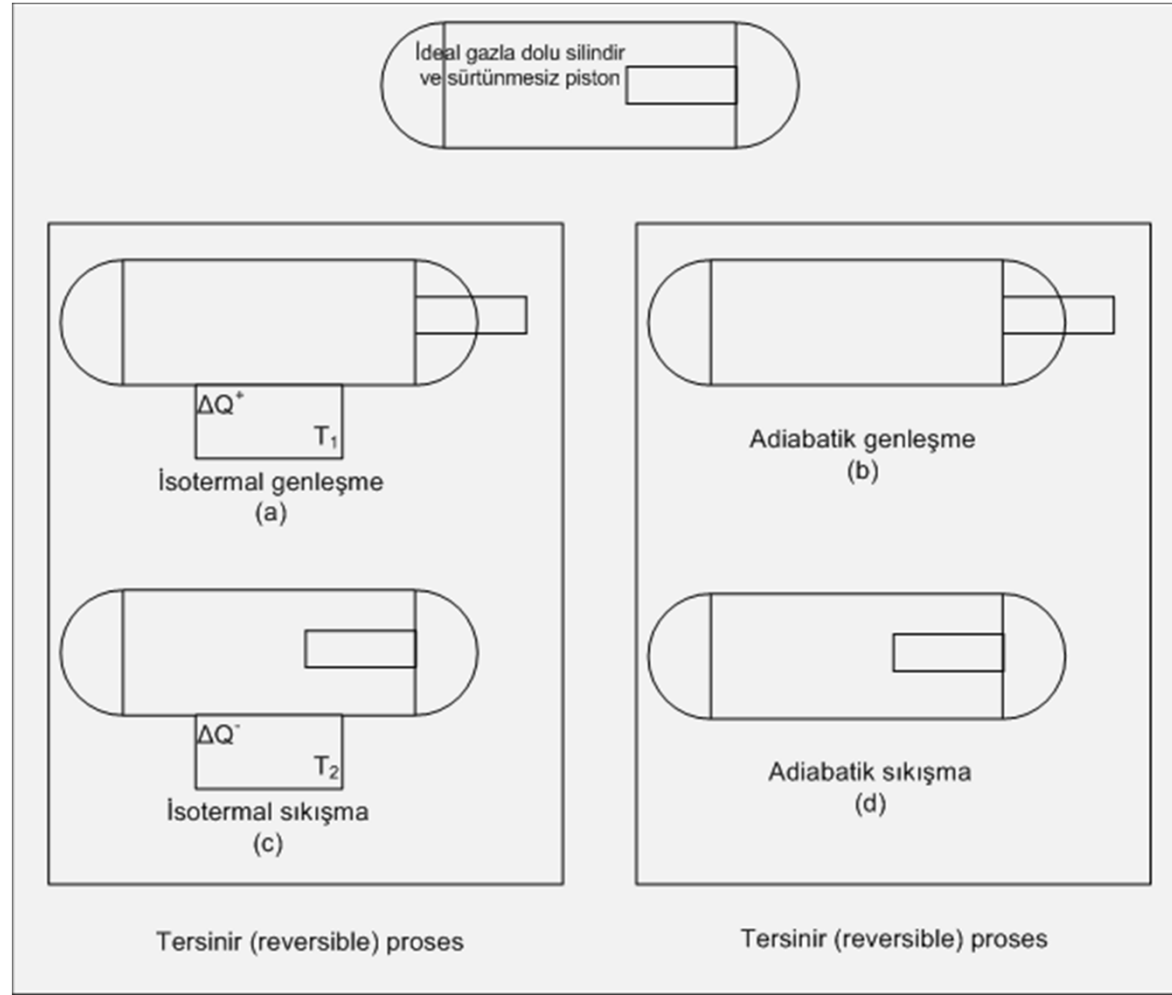
$$\Delta E_{universe} = 0$$

- 2. Kanun: Tek sonucu ısının işe dönüşmesi olan bir proses olası değildir (entropi).

$$\Delta S_{universe} > 0$$

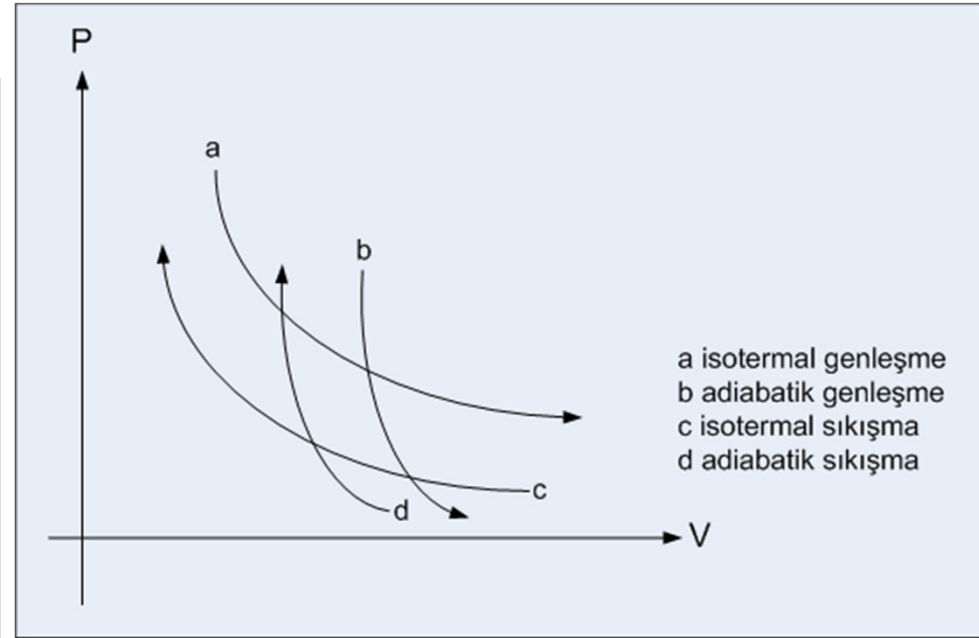
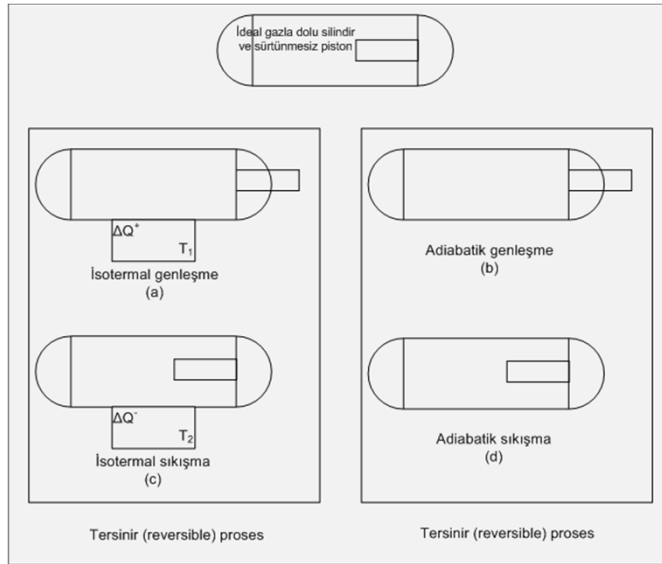
# Termodinamik İlkeler

Sadi-Carnot Çevrimi (1824)



# Termodinamik İlkeler

## Sadi-Carnot Çevrimi



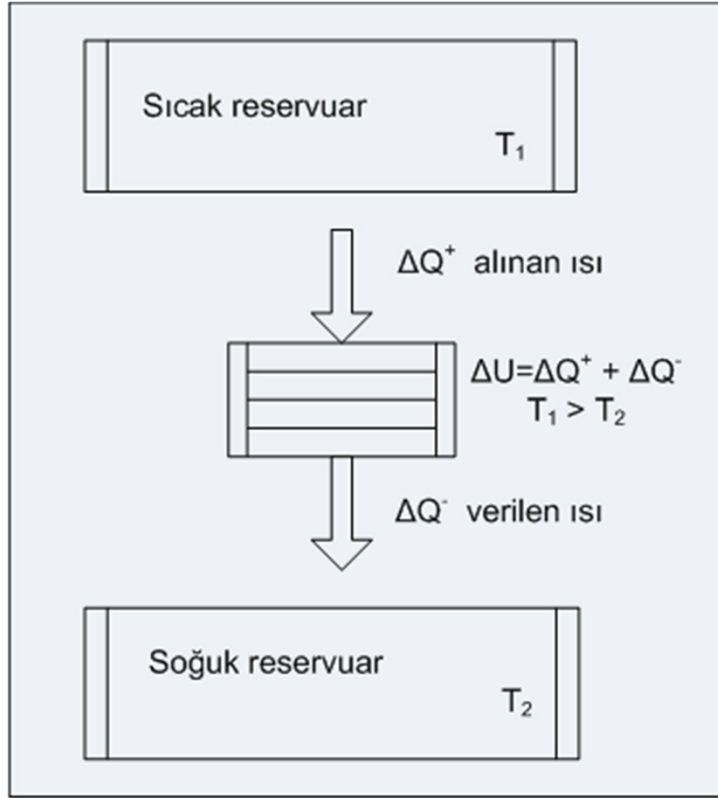
İki tersinir prosesin toplamı da yine tersinir bir prosestir.

İsothermal genişleme + Adiyatik genişleme + İsothermal sıkışma + Adiyatik sıkışma =  
Bir tam Sadi-Carnot tersinir çevrimi.

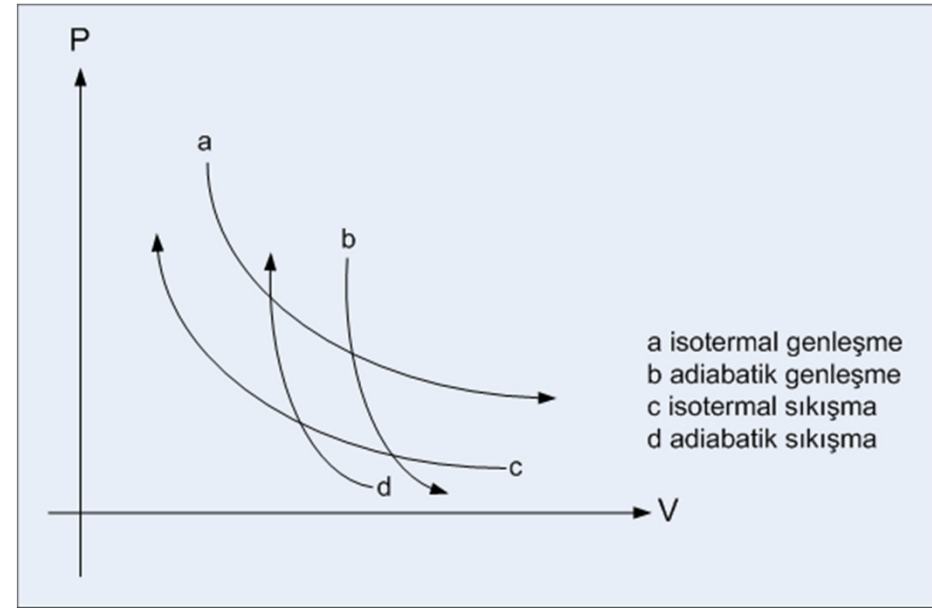


# Termodinamik İlkeler

Sadi-Carnot Çevrimi = Isı Makinası



Isı Makinası



Isı makinasının yaptığı toplam iş  
P-V grafiğindeki kapalı alana eşittir =  $\int PdV$

# Termodinamik İlkeler

$$\Delta U = \Delta Q^+ + \Delta Q^-, \quad \Delta Q^- \text{ negatif}$$

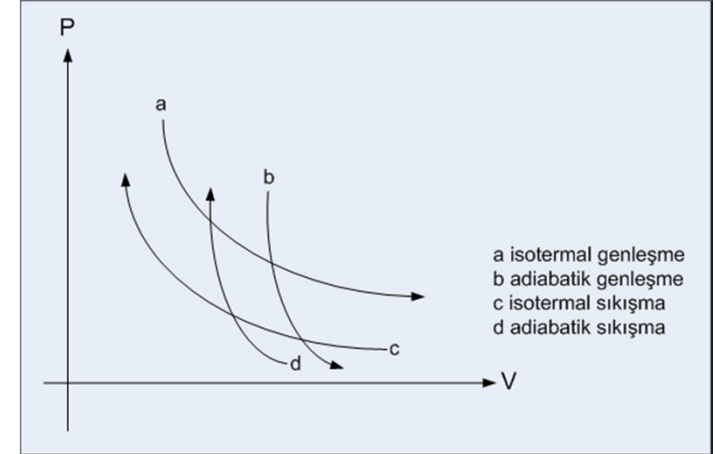
$$\Delta Q^+ = \int_a^b P dV = \int_a^b RT_1 \frac{dV}{V} = RT_1 \log \frac{V_b}{V_a}$$

$$\Delta Q^- = \int_c^d P dV = \int_c^d RT_2 \frac{dV}{V} = RT_2 \log \frac{V_d}{V_c}$$

ve  $\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$  olduğundan  $\frac{\Delta Q^+}{T_1} + \frac{\Delta Q^-}{T_2} = 0$  olur.

Bu durumda; tersinir prosesler için:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \text{ olur.}$$



# Termodinamik İlkeler

zaman da parametre olarak alındığında:

$$\oint Q(t)T^{-1}(t)dt \text{ olur.}$$

*o halde* T ve V'nin fonksiyonu olarak entropi;

$$S(T_b, V_b) = S(T_a, V_a) + \int_a^b \frac{dQ}{T}$$

biçiminde yazılabilir ki entegrasyon tersinir bir süreçte yapılmıştır.

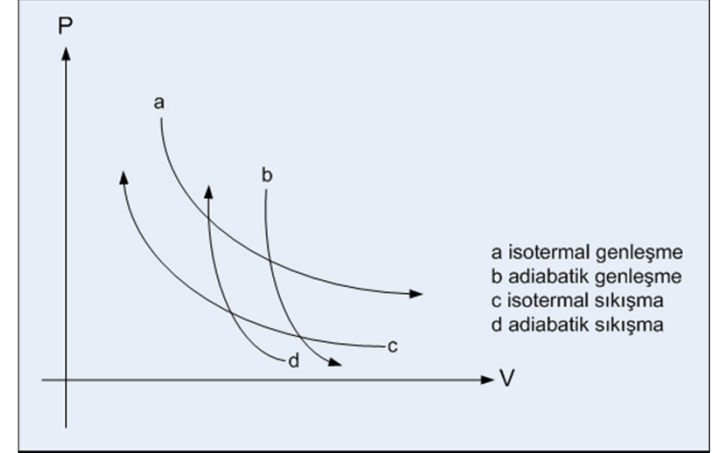
*Bu* noktada eğer proses tersinir değilse, toplam entropi:

$$\oint ds \geq 0.$$

*olarak* yazılabilir (2. kanun).

**Bu durumda; açıkça görülmektedir ki:**

- 1) Tersinir olmayan (irreversible) tüm süreçlerde, entropi zamanla artmaktadır.**
- 2) Tersinir süreçlerde ise entropi zamanla azalmaz.**



# Termodinamik İlkeler

Bir örnek:

Sabit sıcaklıktaki bir ideal gazın entropisini hacmin fonksiyonu olacak şekilde bulalım:

$$PV=nRT$$

*o halde* V'nin fonksiyonu olarak entropi;

$$\begin{aligned} S(V_b) - S(V_a) &= \int_a^b \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \Delta Q = \frac{1}{T} \int_a^b P dV \\ &= \frac{1}{T} \int_a^b \frac{RT}{V} dV = R(\log V_b - \log V_a) \end{aligned}$$



# *Hesaplamanın Termodinamiği*

- $y = f(x)$  hesabının termodinamik maliyeti.
- Termodinamik açıdan Bilgisayar: Bilginin *prosesinde* enerji (ısı) saçan (heat dissipation) bir Turing makinası.
- Hesaplama hızınının limitleri: Isı açığa ıkığı.
- Isınma şeklinde ortaya çıkan kaçınılmaz entropi artığı.
- VLSI tasarımında ana nokta: Heat dissipation.



# *Hesaplamanın Termodinamiği*

- (1949) Von Neumann: T sıcaklığında çalışan bir bilgisayar, her bir bit operasyonu başına en az

$kT \ln 2$  J. ısı sağınıımı (heat dissipation) yapacaktır.

- Bu da oda sıcaklığında:

$kT \ln 2$  J =  $2.8 \times 10^{-21}$  Joule *olmaktadır.*

$k$  Boltzmann sabitidir.

# *Hesaplamanın Termodinamiği*

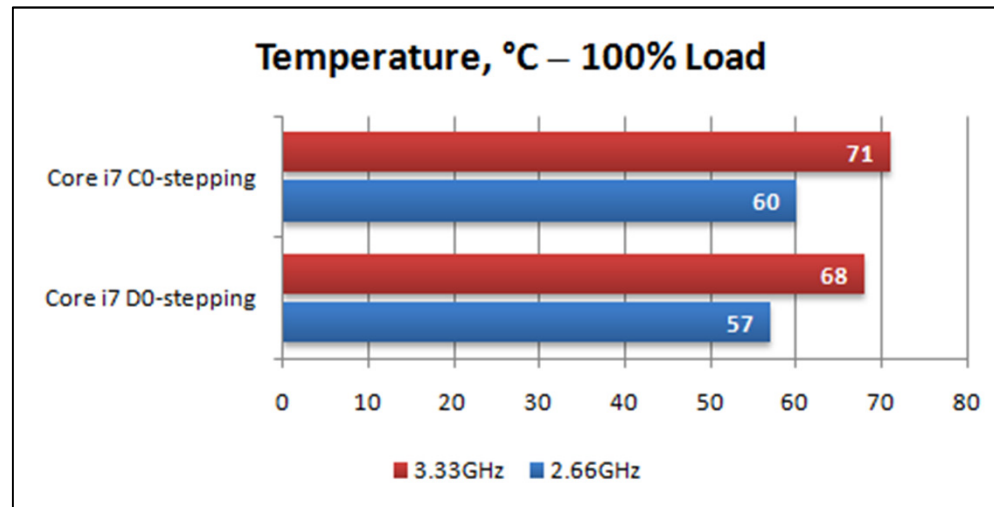
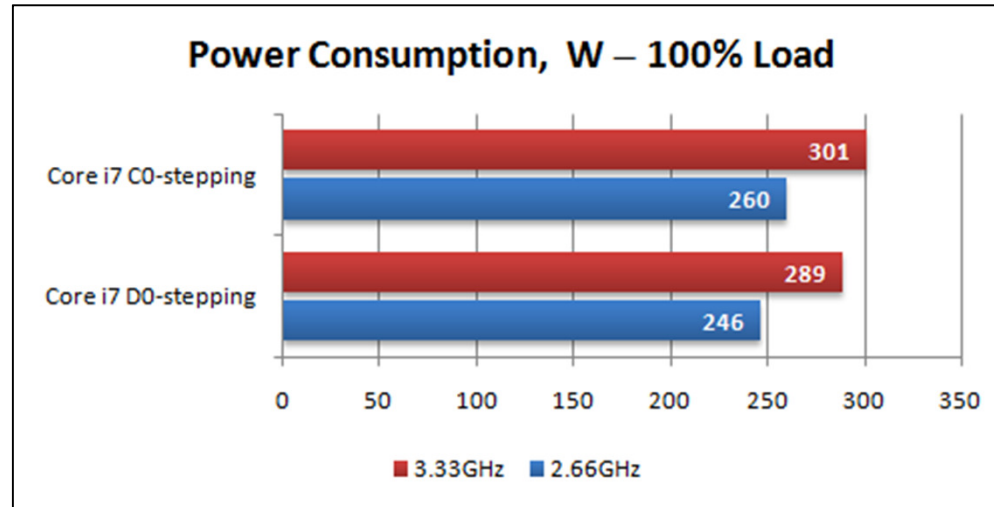
- (1961) R. Landauer: “Sadece mantıksal olarak tersinir olmayan (logically irreversible) operasyonlar enerji saçınımı (heat dissipation) yapar”
- Çıktılardan girdileri belirlenebilen operasyonlar mantıksal olarak tersinirken; belirlenemeyenler mantıksal tersinemez operasyonlardır.
- Silme işlemi tersinmezdir; silinen her bir bit,  $kT \ln 2$  J. değerinde termodinamik maliyet yaratır.

# Hesaplamanın Termodinamiği

- Son 50 senede her bir mantıksal işlem başına enerji saçınımı, her 5 senede 10 kat azaltıldı.
- 1945 yılında bu değeri  $10^9$  picoJoule (1 picoJoule =  $10^{-15}$  Joule) iken 1988 yılında 1/10 picoJoule değerine kadar azaltıldı.
- Ancak sorun devam ediyor:
- 1 cm<sup>3</sup> hacminde,  $10^{18}$  tane mantıksal kapısı olan, oda sıcaklığında ve 1 GHz hızında çalışan ve mantıksal olarak tersinir olmayan operasyon başına kT Joule termodinamik maliyeti olan (ısınan) bir bilgisayar, yaklaşık olarak **saniyede 3 megawatt** değerinde bir ısı yayacaktır.
- Bu bilgisayarı bu haliyle soğutmak zor olur!!! (1988) Keyes.

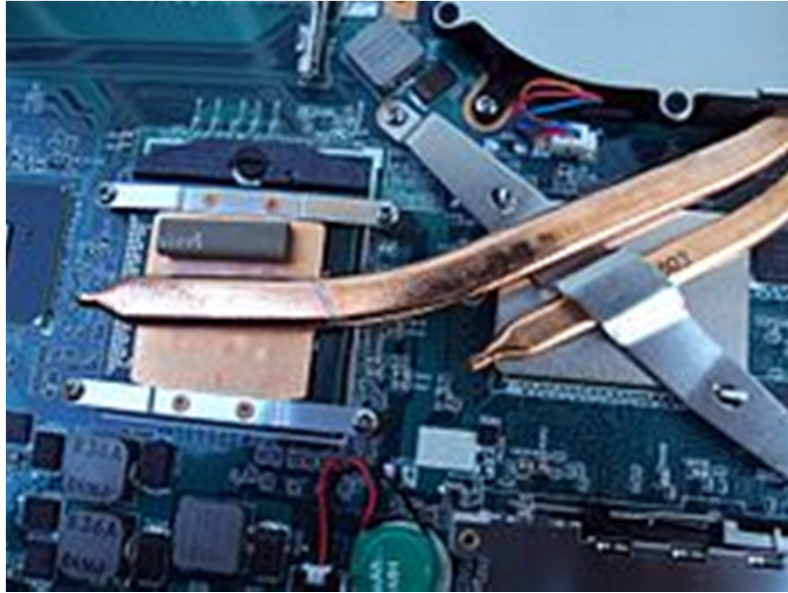


# Hesaplamanın Termodinamiği

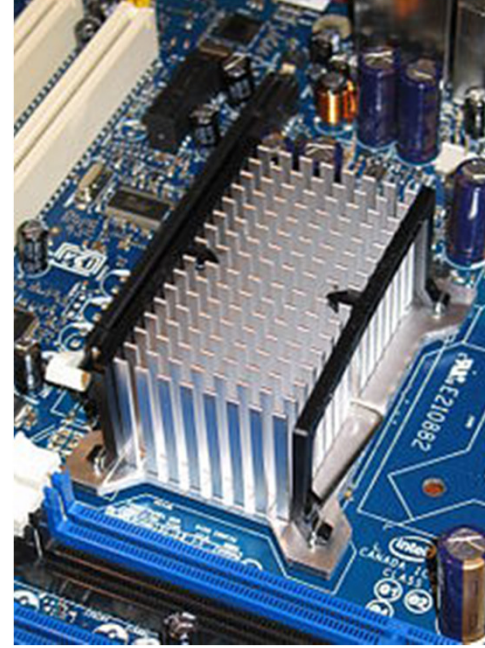


**Intel Core i7, 2011**

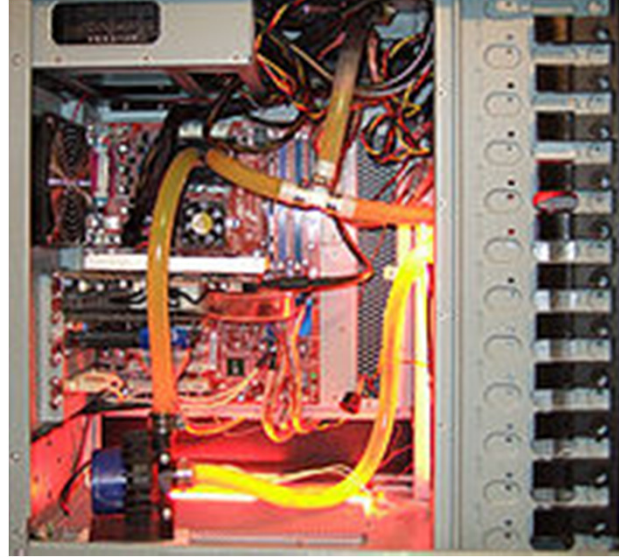
# Hesaplamanın Termodinamiği



# Hesaplamanın Termodinamiği

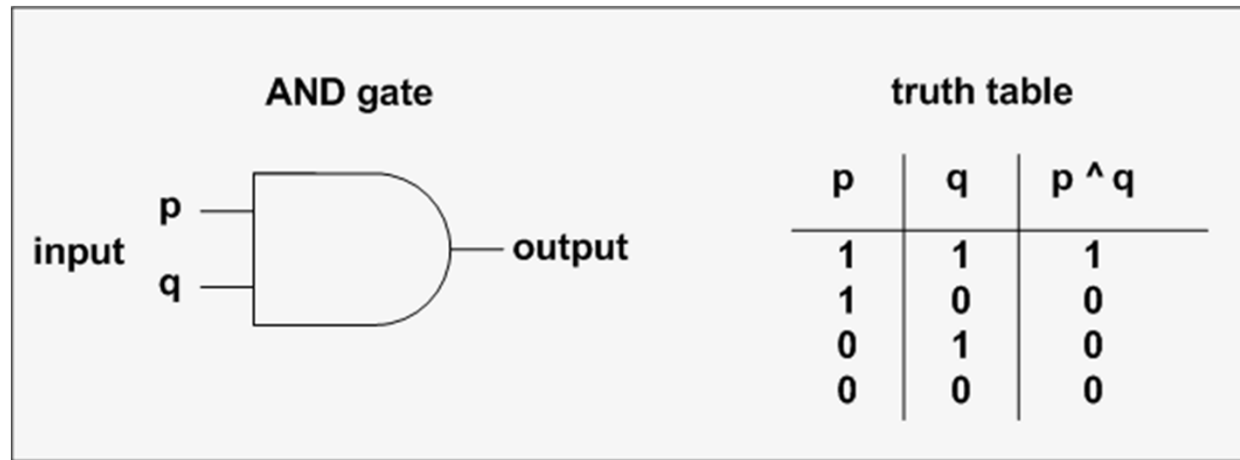


# *Hesaplamanın Termodinamiği*



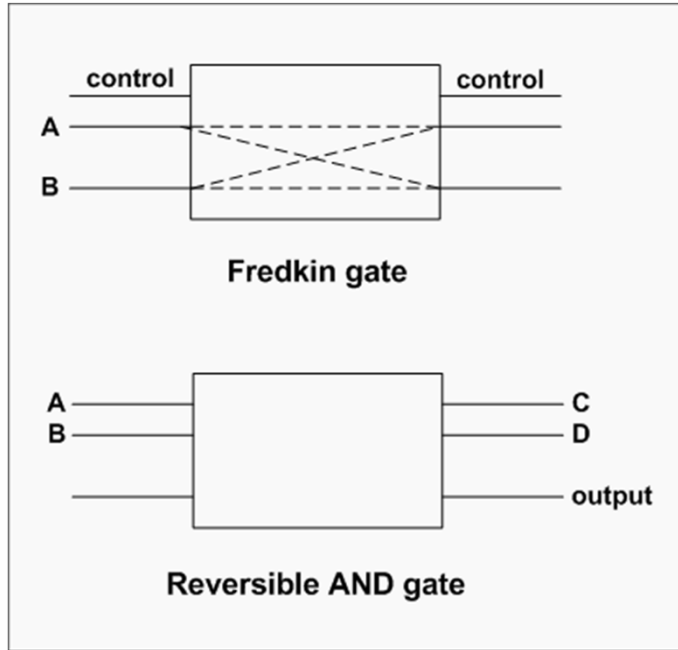
# Hesaplamanın Termodinamiği

- Mantıksal Tersinmez işlem (logically irreversible):



# Hesaplamanın Termodinamiği

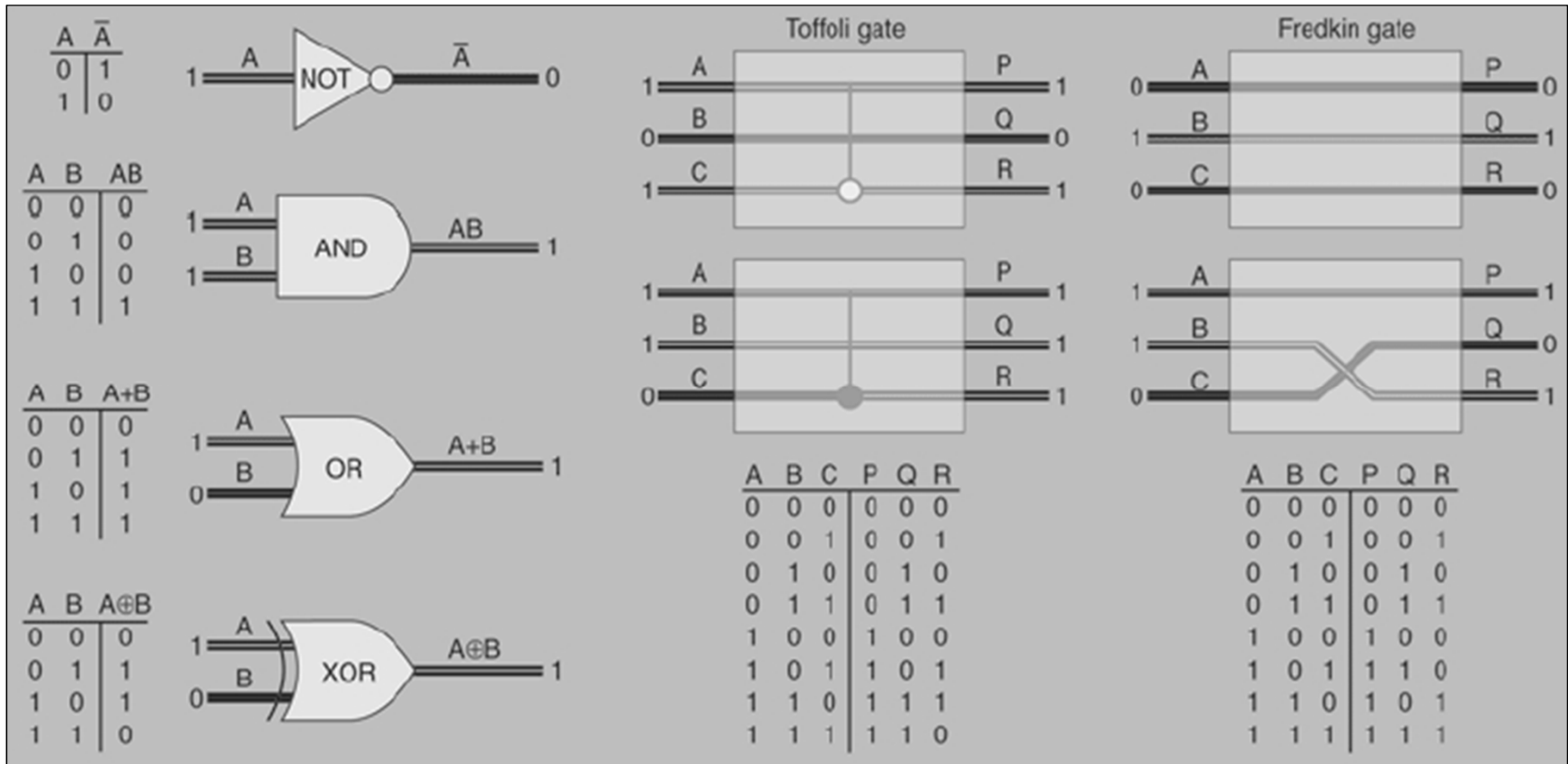
- Mantıksal Tersinir işlem (logically reversible):



Fredkin kapısı nonlineerdir.

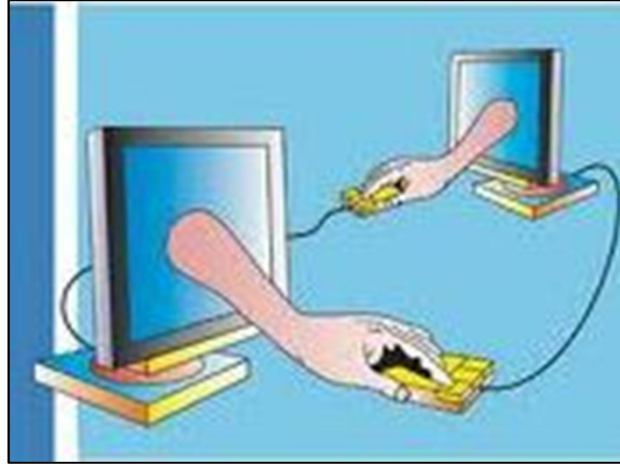
# Hesaplamanın Termodinamiği

- Mantıksal Tersinir işlem (logically reversible):



# *Tersinir Hesaplama (reversible computing)*

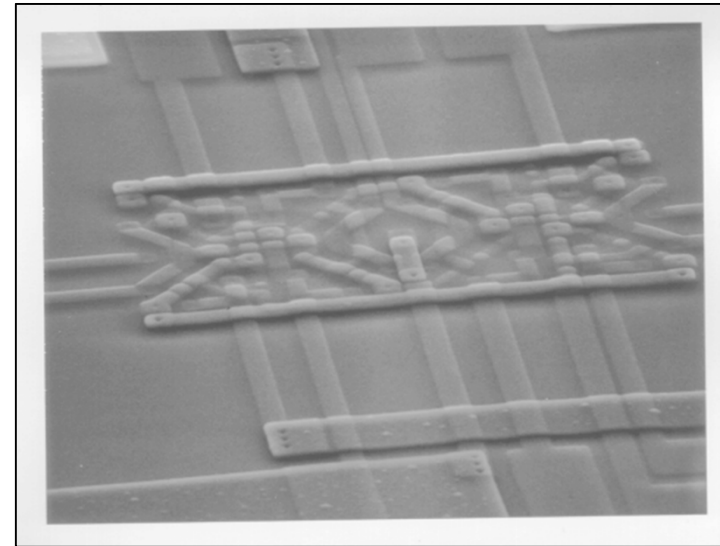
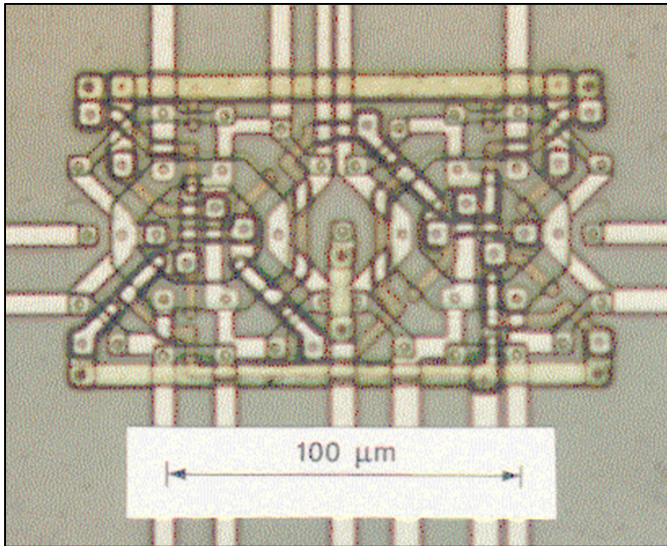
Tersinir işlem kapı ve işlemcileri





# *Tersinir Hesaplama (reversible computing)*

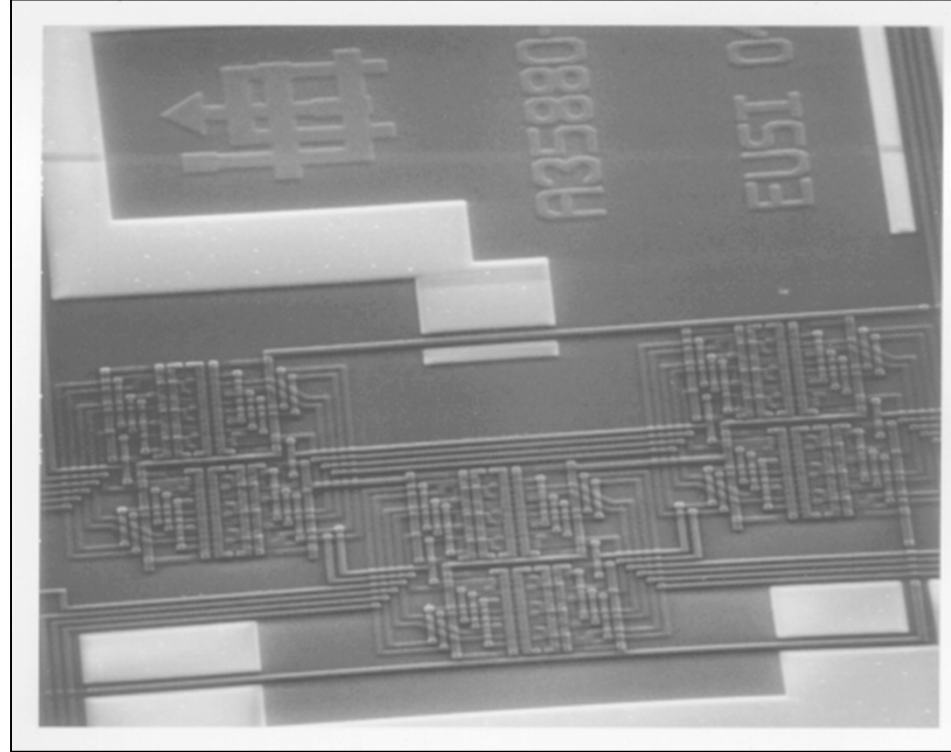
Tersinir işlem kapı ve işlemcileri



Tersinir mantık kapısı, 3 giriş-3 çıkış  
Solda optik mikroskop, sağda taramalı elektron mikroskop

# *Tersinir Hesaplama (reversible computing)*

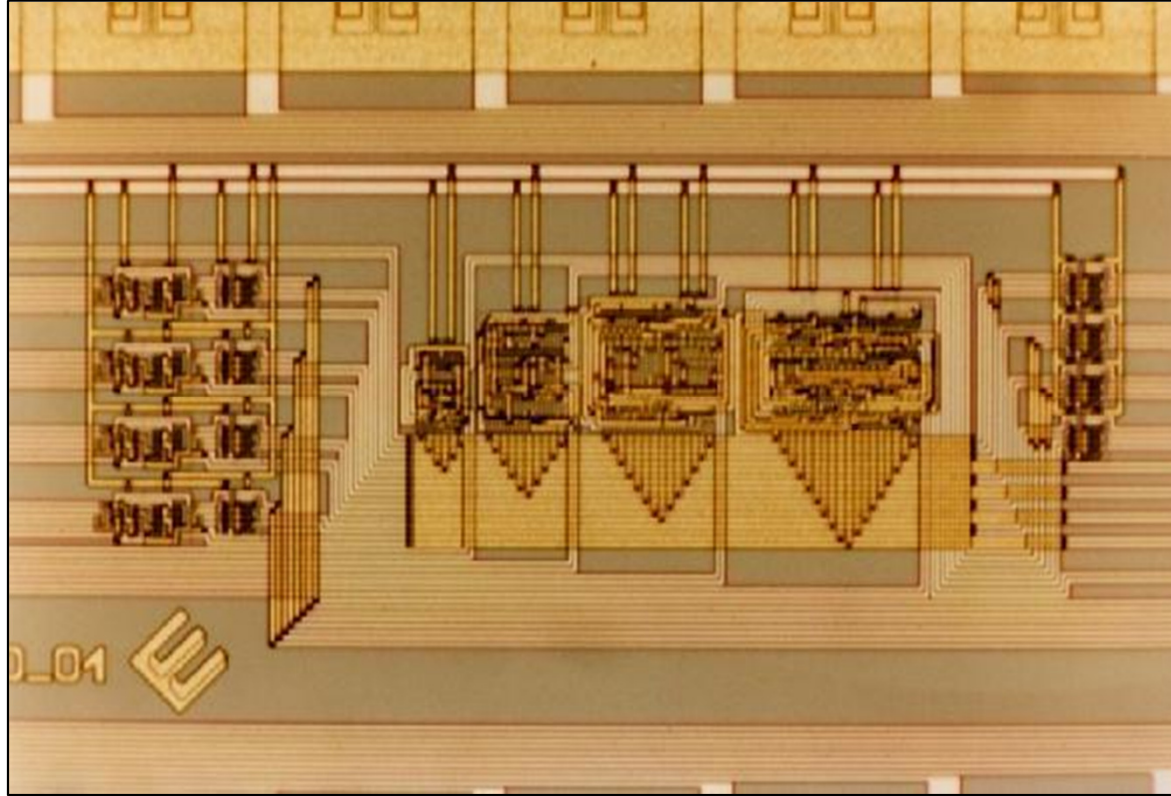
Tersinir işlem kapı ve işlemcileri



Tersinir 144 adet transistör, taramalı elektron mikroskop

# *Tersinir Hesaplama (reversible computing)*

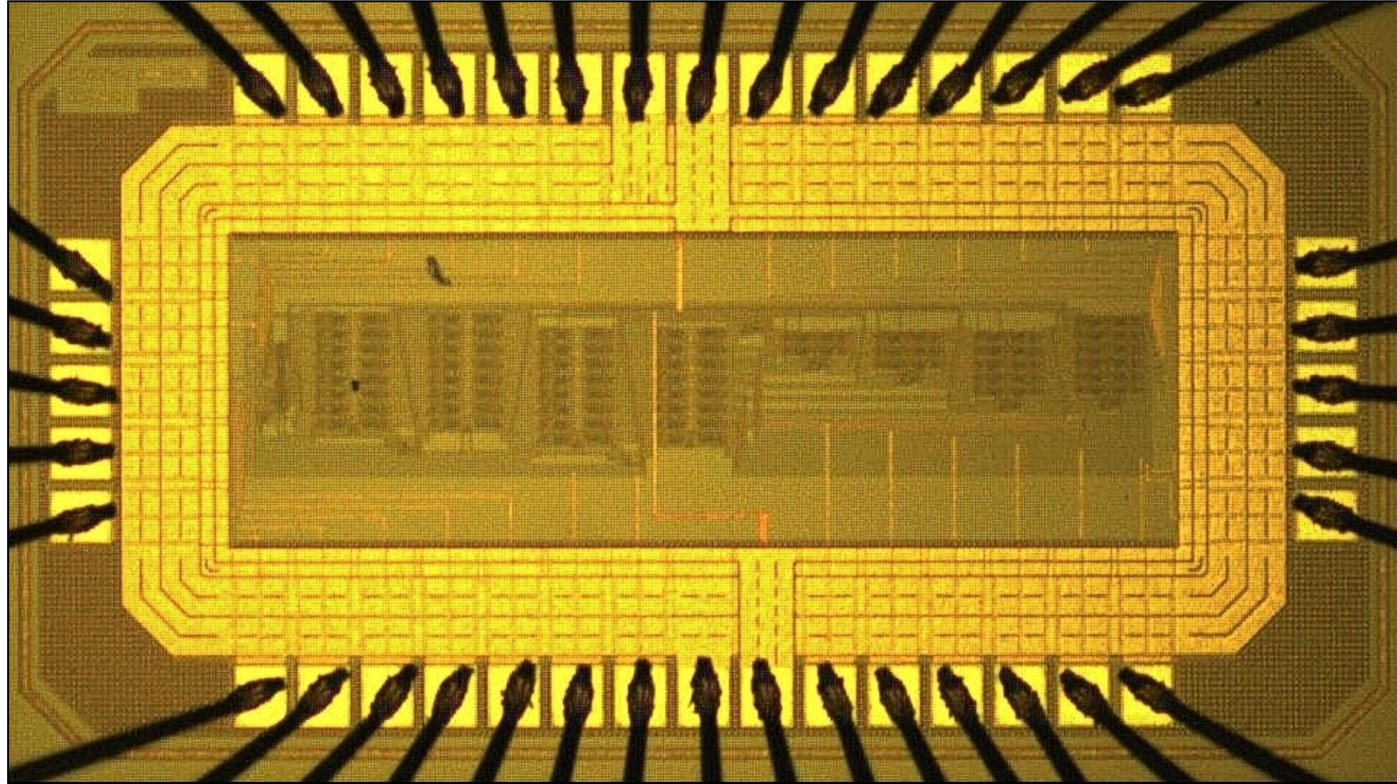
## Tersinir işlem kapı ve işlemcileri



Tersinir 4 bit full-adder- Feynman gates


# *Tersinir Hesaplama (reversible computing)*

Tersinir işlem kapı ve işlemcileri



**2,504 transistor'den oluşan bir devre.**

**Tersinir olarak herhangi 8 bitlik bir sayıyı  $\sqrt{2}/2$  ile çarpar.**




## *Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı*

- Hesaplamanın minimum termodinamik maliyeti =  
(Hesaplama sırasında kullanılan ekstra bitlerin oluşturulması için gereken enerji ) + (oluşturulmuş olan gereksiz bitlerin silinmesi için gereken enerji)
- Bu denklem sadece tersinir olmayan mantıksal işlemler için geçerlidir (Landauer prensibi).
- Aksiyomatik olarak incelenirse:

## *Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı*

- **Aksiyom 1:** Tersinir (reversible) hesaplama herhangi bir termodinamik maliyet oluşturmaz.
- **Aksiyom 2:** Herhangi bir hesaplamada tersinmez (irreversible) olarak oluşturulan ve tersinmez olarak silinen bitler birim termodinamik maliyet oluşturur.
- **Aksiyom 3:** Çıktı  $y$ 'nin yerini aldığı Girdi  $x$ ' ile yapılan bir tersinir hesaplamada, Girdi  $x$  tersinir olarak sağlanmaktadır ve Çıktı  $y$ , tersinir olarak silinmiştir.
- **Aksiyom 4:** Tüm fiziksel hesaplamalar bir makine tarafından yapılabilir (effective). (1993) Ming LI, Paul VITANYI.
- Dikkat edilmesi gereken nokta: İlk 3 aksiyom Fizik biliminden gelmekte olup, 4. aksiyom Church tezinden kaynaklanmaktadır.



## *Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı*

- İlk 3 aksiyom bütünüyle tersinmez olarak sağlanan ve silinen bitlerle ilgilidir.
- Bu durumda bit düzeyinde sıkıştırma önem kazanacaktır.
- Herhangi bir hesaplamada dikkate alınan zaman karmaşası (time complexity) bu kez, aynı işi yapan en kısa yazılım, ya da başka bir deyişle en kısa bit dizisi karmaşası (space complexity) olarak dikkate alınmak zorundadır.
- En kısa bit dizisi, fiziksel hesaplamada karşımıza çıkan ısı çıkışı (heat dissipation) sorunu ile doğrudan ilgilidir.
- En kısa bit dizisi ise Kolmogorov karmaşası ile tanımlanabilir.

# Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı

**Kolmogorov Karmaşası (Kolmogorov Complexity):**  $x$ 'in Kolmogorov karmaşası,  $x$ 'in makine tarafından işlenebilecek en kısa (effective) halidir.

- Formal olarak:

$$x, y, z \in N$$

$N$  ve  $\{0,1\}^*$  arasında  $(0,\varepsilon), (1,0), (2,1), (3,00), (4,01)...$  gibi bir eşleme olsun.

Bu durumda;  $x$ 'in uzunluğu  $|x|$ , binary string  $x$ 'de olan bitlerin sayısıdır.

$T_1, T_2, \dots$  Turing makinaları olsun.

$\phi_1, \phi_2, \dots$  Turing Makinalarına karşılık gelen kısmi rekursiv fonksiyonlar olsun.

Öyleki  $\phi_i$ ,  $T_i$  tarafından işlenmektedir.


$|T_i|$   $T_i$  tarafından işlenen kodun uzunluğu olsun.

$\langle \bullet \rangle : N \times N \rightarrow N$ 'e standart invertibl bijection olsun (1-1, onto, reversible).

Bu durumda verilmiş  $y$  için,  $x$ 'in Kolmogorov karmaşası

$$K(x/y) = \min \left\{ |p| + |T_i| : \phi_i(\langle p, y \rangle) = x, p \in \{0,1\}^*, i \in N \right\}.$$





## *Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı*

$y = f(x)$  hesabının termodinamik maliyeti:

$\varphi$ , tersinir bir Turing makinasınca hesaplanan bir fonksiyon.

$x$ 'den  $y$ 'yi hesaplamanın termodinamik maliyeti:

$$E_{\varphi}(x, y) = \min \{ |p| + |q| : \varphi(\langle x, p \rangle) = \langle y, q \rangle \} \text{ olur.}$$

Tüm maliyet fonksiyonları sınıfı  $\mathcal{E}$  olsun.

Bu durumda  $\mathcal{E}$  evrensel termodinamik maliyet fonksiyonu:


$\forall \varphi \in \Phi$  için

$$E_{\varphi_0}(x, y) \leq E_{\varphi}(x, y) + c_{\varphi}, \forall x, y \text{ ve } c_{\varphi} \text{ sabit.}$$

Referans bir evrensel fonksiyon  $\varphi_0$

değerine göre bu termodinamik maliyet:

$$E(x, y) \equiv E_{\varphi_0}(x, y).$$



## *Hesaplamanın Termodinamik Maliyetinin Matematiksel Kuramı*

*Teorem 1 Temel Teorem:*

$y = f(x)$  hesabının termodinamik maliyeti:

$$E(x,y) = K(x/y) + K(y/x).$$

*Teorem 2 Silme:*

*Etkin silmenin termodinamik maliyeti:*

Eğer  $t$  zamanla sınırlanmış ise, öyleki:

$$K(t/x) = \Omega(1), \text{ o halde}$$

$n$  bit uzunluğunda bir  $x$  kaydını silmenin termodinamik maliyeti

$K^t(x)$  bit olur.



## *Hesaplamanın Termodinamiği ve Bilgi Kuramı*

Shannon Bilgi Kuramında Entropi:

$$H(X) = -\sum p_i \cdot \log p_i$$

Örneği anımsayalım:

Sabit sıcaklıktaki bir ideal gazın entropisini hacmin fonksiyonu olacak şekilde bulalım:

$$PV=nRT$$

*o halde* V'nin fonksiyonu olarak entropi;

$$\begin{aligned} S(V_b) - S(V_a) &= \int_a^b \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \Delta Q = \frac{1}{T} \int_a^b P dV \\ &= \frac{1}{T} \int_a^b \frac{RT}{V} dV = R(\log V_b - \log V_a) \end{aligned}$$

## *Hesaplamanın Termodinamiği ve Bilgi Kuramı*

Örnekteki gazın hücrelere bölünmüş bir hacimde tutulduğunu düşünelim.

Her hücrede bir molekül olabilir (1) veya olmayabilir(0).

$V_a$  hücresel hacminde bir gazın bulunma olasılığı  $N_a$

ve aynı şekilde

$V_b$  hücresel hacminde bir gazın bulunma olasılığı  $N_b$  ise;

*bu durumda :*

$$(\log N_b - \log N_a) = (\log V_b - \log V_a) \text{ olur.}$$

**Shannon entropisi**

**Termodinamik entropi**



## *Hesaplamanın Termodinamiği ve Bilgi Kuramı*

- Bir mesajın Shannon entropisi, o mesajın kodlanması için gereken bit sayısıdır.
- Termodinamik entropi ile Shannon entropisi kavramsal olarak eşdeğerdır.
- Belirli bir düzenleme yapabilmek için Boltzmann entropisinin belirlediği düzen sayısı, aslında Shannon bilgisi olarak oluşur.
- Her ikisi arasındaki en önemli fark ise birimlerdir. Termodinamik entropi  $\text{JK}^{-1}$  birimiyle verilirken, Shannon entropisi birimi bit'tir ve boyutsuzdur.

## *Hesaplamanın Termodinamiği ve Bilgi Kuramı*

- 1Gigabyte kapasiteli bir bellek (RAM),  $10^{10}$  bit Shannon entropisine sahiptir. Öte yandan aynı malzemenin oda sıcaklığındaki termodinamik entropisi  $10^{23}$  bit civarındadır.
- Aradaki farkın nedeni; entropilerin farklı serbestlik derecelerine göre hesaplanıyor olmasından kaynaklanır.
- Shannon entropisi, söz konusu RAM'de yer alan her bir transistörün 1 ya da 0 olması ile ilgilendir; bu da tek serbestlik derecesine tekabül eder.

## *Hesaplamanın Termodinamiği ve Bilgi Kuramı*

- Halbuki termodinamik entropi; her transistörü oluşturan milyarlarca atom ve onların elektronlarının durumları (state) ile ilgilenir. Bu hesapta bir çok serbestlik derecesi yer alır.
- Bu aşamada teknolojinin gelişimindeki hedef: Her atomun tek bir bit bilgi tutacak (var veya yok, 1 veya 0) şekilde kullanılabilmesidir. Bۆylece RAM'in Shannon-bilgi entropisi ile o RAM'in yapıldığı malzemenin termodinamik entropisi birbirine yaklaşacaktır.

## KAYNAKLAR

R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM J. Res. Develop.*, 5:183–191, 1961.

E. Fredkin and T. Toffoli. Conservative logic. *Int. J. Theoret. Physics*, 21(3/4):219–253, 1982.

C.H. Bennett. The thermodynamics of computation—a review. *Int. J. Theoret. Physics*, 21:905–940, 1982.

C.H. Bennett and R. Landauer. The fundamental physical limits of computation. *Scientific American*, pages 48–56, July 1985.

M. Li and P.M.B. Vitányi, Reversibility and adiabatic computation: trading time and space for energy, *Proc. Royal Society of London, Series A*, 452(1996), 769-789.

M. Li and P.M.B. Vitányi, Reversible simulation of irreversible computation, *Proc. 11th IEEE Computational Complexity Conference*, IEEE Comp. Soc. Press, 1996, 301-306.

M. Li and P.M.B. Vitányi. *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 2nd Edition, 1997.





*Sabır ve İlginize çok teşekkür ederim.*

*A. Koltuksuz*